Dimensionnement des piliers d'un pont métallique

1.1 Calculer la masse dm(z) d'une tranche de hauteur dz et de section moyenne S(z) en notant ρ la masse volumique de l'acier

dm(z) = $$dm(z) = \rho S(z)dz \quad (\text{ qui donne } dm(z)/dz = \rho S(z))$$

1.2 Calculer alors la quantité m(z) pour z > 0 :

m(z) = $$m(z) = \int_0^z \rho S(z)dz = \rho \int_0^z S(z)dz$$

1.3 Que vaut la contrainte de compression σ en z = 0 ?

$\sigma_{z=0}$ = $$\text{en } z = 0,\ \sigma = P_T / S_0 = f\,R_{0.2\%}$$

1.4 Ecrire que cette quantité est égale $fR_{0.2}$ pour exprimer la section optimale en z = 0, S0, en fonction de P_T et de $fR_{0.2}$

-

-

S0 =

$$\text{en } z = 0,\ \sigma = P_T / S_0 = f\,R_{0.2\%}$$

$$\text{soit } S_0 = P_T / \left(f\,R_{0.2\%} \right)$$

1.5 A une distance z > 0, l'optimisation de la section S impose que la contrainte de compression en z soit égale à $fR_{0.2}$. Ecrire cette condition en introduisant la quantité m(z) et les paramètres du problème.

-

-

-

$$\text{en } z > 0,\ \text{Force}(z) = \sigma_z S(z) = f\,R_{0.2\%} S(z) = m(z)g + P_T$$

1.6 Dériver cette équation par rapport à z pour trouver l'équation différentielle vérifiée par la section S :

$$f\,R_{0.2\%} \frac{dS(z)}{dz} = \rho g S \text{ avec } s(z{=}0) = S_0$$

Dimensionnement des piliers d'un pont métallique

1.7 Intégrer alors cette équation différentielle pour trouver la fonction S(z) avec S(0)=S0.

-

-

S(z) =

$$s(z) = S_0 e^{\frac{\rho g z}{f R_{0.2\%}}} = S_0 e^{\frac{\rho S_0 g z}{P_T}}$$

1.8 Faire apparaitre la distance caractéristique z_0 pour laquelle la section S0 devient eS0 ou e est l'exponentielle de 1 et exprimer z_0 en fonction des données du problème.

z_0 =

$$s(z) = S_0 e^{\frac{z}{z_0}} \text{ avec } z_0 = \frac{f R_{0.2\%}}{\rho g}$$

1.9 Que vaut $R_{0.2}$?

$R_{0.2}$ =

$$R_{0.2\%} = 290 \text{ MPa}, f = 0.7$$

1.10 Calculer z_0 en m (mètre) dans le cas de notre acier en prenant ρ = 7 t/m3

$$z_0 = \frac{f R_{0.2\%}}{\rho g} = \frac{0.7 \text{ x } 290.10^6}{10 \text{ x } 7.10^3} = \frac{7 \text{ x } 29.10^2}{7} = 2900 \text{ m}$$

NB: z_0 est beaucoup plus élevé que la hauteur typique d'un pont en acier.

Autrement dit $z \ll z_0$ et on peut faire un dévlpt limité pour S(z):

$$S(z) = S_0 \exp(z/z_0) \approx S_0(1 + z/z_0 + O((z/z_0)^2)) \approx S_0(1 + z/z_0)$$

Pour notre acier, on peut prendre une section constante égale à S_0.

Dimensionnement des piliers d'un pont métallique

Questions bonus:

Que vaut la déformation élastique du pilier selon z ?

Dans chaque section la contrainte faut fR0.2 : elle est uniforme et élastique.
La déformation élastique selon z vaut donc $fR_{0.2}$ /E_{acier} = 290 x 0.7/210000 = 0.097 %.

De combien un pilier de 100 m se comprime-t-il ?

Le pilier se comprime de 100 m x 0.097 % = 0.097 m = 9.7 cm